**1.Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.**

Пусть тело, имеющее температуру http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image001.gif в момент времени http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image002.gif, помещено в среду температуры http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image003.gif. Требуется найти закон, но которому изменяется температура тела в зависимости от времени. Искомая температура есть функция от времени, которую обозначим через http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image004.gif.

Из физики известно, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Учитывая, что функция http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image004.gif убывающая, в силу механического смысла [производной](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) получаем

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image005.gif(1)

где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image006.gif - коэффициент пропорциональности.

Соотношение (1) является [математической моделью](http://stu.sernam.ru/book_stat1.php?id=16) данного физического процесса. Оно называется [дифференциальным уравнением](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40), потому что в него наряду с неизвестной функцией http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image004.gif входит и ее [производная](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117). Дифференциальное уравнение (1) может описывать и другие физические процессы. Например, [радиоактивный распад](http://sernam.ru/book_phis_t3.php?id=216) также описывается уравнением (1)

при http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image007.gif.Решение уравнения (1) легко угадать: http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image008.gif, где http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image009.gif — произвольная постоянная. Значение этой постоянной можно найти из условия http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image010.gif, из которого следует, что http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image011.gif.

Таким образом, искомое решение имеет вид

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_2.files/image012.gif

При решении многих задач математики, физики и техники часто не удается установить непосредственную зависимость между искомыми и данными [переменными величинами](http://edu.sernam.ru/book_sm_math1.php?id=4), но зато удается составить уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее [производные](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117). Такое уравнение называется дифференциальным. Решая его, находят зависимость уже между самими переменными. [Дифференциальное уравнение](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40) может не содержать в явном виде независимую переменную и искомую функцию, но обязательно должно содержать одну или несколько производных искомой функции.

Например, уравнения

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_274.files/image1.gif

будут дифференциальными уравнениями.

С простейшим дифференциальным уравнением мы уже встречались при решении задачи об отыскании [первообразной функции](http://edu.alnam.ru/book_man_b.php?id=123). Действительно, если функция y = F(x) есть [первообразная](http://edu.sernam.ru/book_m_cat.php?id=40) для функции f(x), то по определению первообразной

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_274.files/image2.gif

Уравнение (1), содержащее [производную](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) искомой функции, является простейшим дифференциальным уравнением.

**2. Дать определение д.у. порядка, общего и частного интеграла, общего и частного решения д.у.**

Если искомая функция зависит от одного переменного, то [дифференциальное уравнение](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40) называется обыкновенным- Произвольное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image001.gif имеет следующий вид:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image002.gif.            (1)

.Здесь http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image003.gif есть заданная (известная) функция от http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image004.gif переменных, обычно удовлетворяющая определенным условиям непрерывности и дифференцируемости, на которых мы сейчас останавливаться не будем, а http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image005.gif - функция от http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image006.gif - решение дифференциального уравнения, которую надо найти.

Порядком дифференциального уравнения называется высший из порядков, входящих в это уравнение производных искомой функции

Функция y(x) называется решением*(*илиинтегралом) дифференциального уравнения на промежутке (a, b), если она n раз дифференцируема на (a, b) и при подстановке в уравнение обращает его в тождество.http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image010.gif.

Каждому решению, вообще говоря, соответствует свой интервал. Конечно, если функция http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image007.gif, заданная на интервале http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image008.gif, есть решение дифференциального уравнения (1), то эта функция, рассматриваемая на интервале http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image011.gif принадлежащем к http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image008.gif, тоже есть решение уравнения (1).

В ближайших параграфах мы будем рассматривать дифференциальные уравнения, определяемые действительными функциями http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image003.gif, и искать их действительные решения http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image007.gif. Термин «действительный» будем опускать, считая его само собой разумеющимся. Впоследствии, когда мы будем изучать линейные дифференциальные уравнения, нам понадобятся также и их комплексные решения. Но об этом речь будет впереди.

Итак, мы будем называть действительные решения http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image012.gif, обыкновенного [дифференциального уравнения](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40) просто решениями этого уравнения.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image001.gif-го порядка по самому его определению есть функция http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image007.gif, непрерывная на некотором интервале http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image008.gif вместе со своими производными до порядка http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image013.gif включительно и имеющая, кроме того, на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image008.gif производную http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image014.gif порядка http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image001.gif. Мы будем считать, что эта последняя [производная](http://stu.sernam.ru/book_msh.php?id=117) тоже непрерывна на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image008.gif, не оговаривая это всякий раз особо.

График решения обыкновенного [дифференциального уравнения](http://sernam.ru/book_e_math.php?id=40) http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image001.gif-го порядка будем называть интегральной кривой этого уравнения.

Впрочем, мы будем позволять себе решение дифференциального уравнения называть интегральной кривой, а интегральную кривую решением.

Так как эта глава посвящена только обыкновенным дифференциальным уравнениям, то не будет путаницы, если слово «обыкновенный» будет иногда опускаться.

Уравнения

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_3.files/image015.gif

могут служить примерами обыкновенных дифференциальных уравнений. Первое из них - третьего порядка, второе и третье - второго порядка, а четвертое - первого порядка.

Кстати заметим, что непосредственно видно, что второе уравнение не имеет вовсе действительных решений.

Общим решением дифференциального уравнения

*F*(*x*, *y*(*x*), *y* '(*x*), *y* ''(*x*),  …  , *y*(*n*)(*x*)) = 0

называется функция

*y* = Ф(*x*,  С1, С2, … , С*n*),

содержащая некоторые постоянные (параметры) С1, С2, … , С*n*, и обладающая следующими свойствами:

1. Ф(*x*, С1, С2,  … , С*n*) является решением уравнения при любых допустимых значениях С1, С2, … , С*m*;
2. для любых начальных данных  *y*(*x*0) = *y*0,  *y* '(*x*0) = *y*1,  *y* ''(*x*0) = *y*2,  …  , *y*(*n*− 1)(*x*0) = *yn*− 1, для которых задача Коши имеет единственное решение,

существуют значения постоянных С1 = *A*1, С2 = *A*2,  … , С*n* = *An*, такие что решение *y* = Ф(*x*, A1, A2,  …, A*n*) удовлетворяет заданным начальным условиям.

Иногда частное или общее решение уравнения удается найти только в неявной форме: *f*(*x*, *y*) = 0 или *G*(*x*, *y*, С1,  С2,  ..., С*n*) = 0.

Такие неявно заданные решения называются частным интегралом или общим интегралом уравнения.

**3.Дать определение д.у. 1-ого порядка, привести различные формы записи, сформулировать основные определения.**

Линейным дифференциальным уравнением первого порядканазывается уравнение вида

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_29.GIF

Здесь *a*(*x*) и *b*(*x*) — известные, непрерывные на [*a*;*b*] функции.

Доказано, что если функции *a*(*x*) и *b*(*x*) непрерывны на [*a*;*b*] , то для любой начальной точки (*x*0, *y*0) , *x*0∈ [*a*; *b*] , задача Коши

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_31.GIF

|  |
| --- |
|  |

имеет единственное решение *y* = *y*(*x*) на [*a*;*b*].

Рассматривают однородные и неоднородные линейные уравнения первого порядка:

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_30.GIF

Общее решение линейного уравнения 1-го порядка можно найти с помощью замены

*y*(*x*) = *u*(*x*)\**v*(*x*) .

Дифференциальное уравнение первого порядка связывает независимую переменную, искомую функцию и ее первую производную. Поэтому в общем виде его можно записать следующим образом:

http://stu.sernam.ru/archive/arch.php?path=../htm/book_msh/files.book&file=msh_275.files/image1.gif (2)

где y = y(x) — неизвестная, непрерывно дифференцируема на (a,b) функция,

Напомним, что решением или частным решением дифференциального уравнения (2) мы называем любую действительную непрерывно дифференцируемую функцию http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image007.gif, заданную на некотором интервале http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image008.gif, которая удовлетворяет этому уравнению:

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image009.gif.

При этом каждое решение имеет, вообще говоря, свой интервал, где оно задано.

Два алгебраических уравнения

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image010.gif                                            (3)

называются эквивалентными на области http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image003.gif точек http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image006.gif, если из того, что точка http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image011.gif удовлетворяет одному из этих уравнений, следует, что она удовлетворяет и другому.

Соответственно два дифференциальных уравнения

http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image012.gif

называются эквивалентными на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image003.gif, если эквивалентны на http://sernam.ru/htm/lect_math3/math3_4.files/image003.gif алгебраические уравнения (3).

Дифференциальное уравнение 1–го порядка имеет бесконечно много решений. Для того чтобы выделить единственное решение, нужно задать дополнительные (начальные) условия.

Задача отыскания решения y = y(x) уравнения F(x, y, y ' ) = 0 , удовлетворяющего условию y(x0) = y0, называется задачей Коши(или начальной задачей).

Условие y(x0) = y0 — начальное условие.

Любое конкретное решение y = y(x) (решение задачи Коши) уравнения 1–го порядка, называется частным решением уравнения.

Общее решение уравнения, записанное в неявной форме Φ(x,y) = *C*, называется общим интегралом уравнения.

Частное решение уравнения, записанное в неявной форме Φ(x,y) = 0, называется частным интегралом уравнения.

Уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно производной, называют уравнением, записанными в нормальной форме:

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_04000000_1.GIF

Уравнения первого порядка часто записывают в дифференциальной форме:

*M*(*x*, *y*)d*x* + *N*(*x*, *y*)d*y* = 0.

Решение такого уравнения можно искать как в виде *y* =*y*(*x*) , так и в виде *x*= *x*(*y*)

Уравнением с разделенными переменныминазывается дифференциальное уравнение вида

f(x)dx + g(y)dy = 0

с непрерывными функциями f(*х*) и g(y).

Однородным уравнением первого порядка называется уравнение вида

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_8.GIF

Заменой*z*= *y*/*x* это уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно функции *z* = *z*(*x*)

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODE_0402000_1.gif

Уравнением, приводящимся к однородному, называется дифференциальное уравнение вида

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_18.GIF

Заменой u = y − y0, v = x − x0 это уравнение приводится к однородному уравнению

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_19.GIF

Здесь x0 и y0 — единственное решение линейной системы

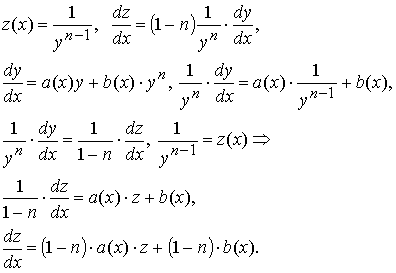
http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_20.GIF

Уравнением Бернулли называется уравнение первого порядка вида

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_56.GIF

Здесь a(x) и b(x) — известные, непрерывные на [a;b] функции, *n* > 1.

Заменой *z*(*x*) =  *y*1-*n*(*x*) уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению относительно функции *z*(*x*):



Получили  линейное относительно *z*(*x*) уравнение:

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_58.GIF

Уравнение *M*(*x*, *y*)d*x* + *N*(*x*, *y*)d*y* = 0

называется уравнением в полных дифференциалах, если выражение в левой части уравнения является дифференциалом некоторой функции двух переменных *F*(*x*, *y*), т.е. если

d*F*(*x*,*y*) = *M*(*x*, *y*)d*x* + *N*(*x*, *y*)d*y*.

Тогда *F*(*x*, *y*) = *C* — общий интеграл уравнения. Здесь *C* — произвольная постоянная.

Уравнение *M*(*x*, *y*)d*x* + *N*(*x*, *y*)d*y* = 0 являетсяется уравнением в полных дифференциалах, тогда и только тогда, когда

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_65.GIF

**4.Геометрический смысл д.у. 1-ого порядка. Дать определение изоклины, изложить метод изоклин решения д.у. 1-ого порядка.**

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение 1–го порядка

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_04000000_1.GIF

Пусть *y* = *y*(*x*) решение уравнения.

Интегральная кривая *y* = *y*(*x*) имеет касательную с угловым коэффициентом *k*  = *f*(*x*,*y*(*x*)). Это означает, что через *каждую* точку (*x*,*y*) области определения функции*f*(*x*,*y*) можно провести небольшой отрезок с угловым коэффициентом *k*  =  *f*(*x*,*y*(*x*)).

    Выполнив такое построение для всех узлов некоторой прямоугольной сетки в области определения правой части уравнения , получим изображение *поля направлений*.

Когда узлы сетки расположены "достаточно часто" поле направлений дает полную картину поведения интегральных кривых.

Метод изоклин — приближенный графический метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1–го порядка.

  Метод позволяет "вручную" (без использования компьютера) построить изображение поля направлений и по этому изображению построить интегральную кривую, проходящую через заданную точку.

Рассмотрим линии, в каждой точке которых угловой коэффициент интегральных кривых имеет одно и то же постоянное значение: *f*(*x*,*y*) = *k*, *k* = *const*.

 Такие кривые называются *изоклинами* дифференциального уравнения *y*' = *f*(*x*,*y*).Равенство *f*(*x*,*y*) =*k* — уравнение изоклины.

В каждой точке (*x*,*y*) изоклины *f*(*x*,*y*) =*k*     интегральные кривые уравнения имеют один и тот же угол наклона *αrctg(α)* = *k*.

  Метод изоклин состоит в следующем.

Строим достаточно густую сетку изоклин для различнх значений *k* и на каждой изоклине изображаем небольшие отрезки с наклоном *k*.

    Затем, начиная из точки (*x*0,*y*0), поводим линию, которая, будет пересекать каждую изоклину под углом, заданным полем направлений. Полученная таким образом кривая и будет приближенным изображением (эскизом) интегральной кривой уравнения, проходящей через точку (*x*0, *y*0).

Метод изоклин как метод приближенного решения задачи Коши устарел. В его в основе лежит алгоритм изображения фрагмента поля направления, а современные компьютеры могут мгновенно и как угодно подробно нарисовать поле направлений, и достаточно точно изобразить интегральную кривую.

Однако, метод изоклин эффективно работает как инструмент исследования поведения решений. Он позволяет изобразить области характерного поведения интегральных кривых.

Например, изоклина f(x, y) = 0 — геометрическое место стационарных точек решения дифференциального уравнения, изоклины f(x, y) = k с большими значениями k показывают области быстрого роста решений и т.п.

**5. Задача Коши. Сформулировать теорему Коши для д.у. 1-ого порядка.**

Дифференциальное уравнение обычно имеет бесконечно много решений. Чтобы выделить нужное решение, используют дополнительные условия.

Чтобы выделить единственное решение уравнения *n*–го порядка обычно задают nначальных условий *y*(*x*0) = *y*0,  *y* '(*x*0) = *y*1,  *y* ''(*x*0) = *y*2,  …  , *y*(*n*− 1)(*x*0) = *yn*− 1.

|  |
| --- |
|  |

Задачей Коши (или начальной задачей) называется задача отыскания решения *y* =*y*(*x*) уравнения

*F*(*x*, *y*(*x*), *y* '(*x*), *y* ''(*x*),  …  , *y*(*n*)(*x*)) = 0,    *x*>*x*0,

удовлетворяющего условиям

*y*(*x*0) = *y*0,  *y* '(*x*0) = *y*1,  *y* ''(*x*0) = *y*2,  …  , *y*(*n*− 1)(*x*0) = *yn*− 1.

|  |
| --- |
|  |

Условия   *y*(*x*0) = *y*0,  *y* '(*x*0) = *y*1,  *y* ''(*x*0) = *y*2,  …  , *y*(*n*− 1)(*x*0) = *yn*− 1 называются начальными данными, начальными условиями или данными Коши.

Любое конкретное решение *y* = φ(*x*) уравнения *n* –го порядка *F*(*x*, *y*(*x*), *y* '(*x*), *y* ''(*x*),  …  , *y*(*n*)(*x*)) = 0, называется частным решением.

 Фундаментальным результатом теории обыкновенных дифференциальных уравнений является теорема существования и единственности решения задачи Коши:

Пусть функция f(x, y) и ее частная производная   f*y*(x, y)  непрерывны в некоторой области D плоскости x0y и точка (x0, y0) принадлежит области D.

Тогда :

— в некоторой окрестности (x0 − δ,x0 + δ) точки x0 существует решение задачи Коши

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_71.GIF

— если y = *φ*1(x) и y = φ2(x) два решения задачи Коши, то *φ*1(x) = *φ*2(x) на (x0 − δ,x0+ δ) .

Геометрически это означает, что если условия теоремы выполнены, то через каждую точку (x0, y0) области D проходит единственная интегральная кривая уравнения.

Бесконечное множество решений уравнения

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_73.GIF

можно рассматривать как однопараметрическое семейство функций y = φ(x; x0) — семейство решений задачи Коши

http://twt.mpei.ac.ru/math/ode/img/ODEf_05000000_71.GIF

элементы которого различны для разных значений x0 . Иными словами область D "расслаивается" на интегральные кривые y = φ(x; x0) .

Важно понимать, что результат теоремы имеет локальный характер — существование и единственность решения гарантированы, вообще говоря, только в малой окрестности точки x0 . Важно также понимать, что условия теоремы существования и единственности достаточные условия. Нарушение условий теоремы не означает, что решение задачи не существует либо что оно не единственно.